课前预读：

《费曼物理学讲义》I ：Chpt.25、47

《新概念物理教程：力学》：第六章

第 29 讲 多自由度体系振动

之前讲述了一维线性弹簧以及小角度单摆的运动，它们都可以视为一维的简谐振动。这样的体系仅有一个自由度，也就是说只需要用一个变量来描述。如弹簧可以用伸长量来描述。单摆可以用摆动的角度来描述。这都是比较简单的情况。经常我们会遇到多自由度的弹性物理体系，也就是说需要用多个独立变量来描述的物理体系。

如下图所示，两个相同质量的小球用三个相同的弹簧联系起来，其中两边的弹簧固定在两边的墙上。如要描述这个体系的运动，一个方便的方式是使用两个小球对平衡位置的偏移量x_1, x_2来描述。这两个变量是相对独立的，因此这个体系的自由度为 2。容易得到体系的运动方程为

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1) = 2kx_1 + kx_2$$

$$m\ddot{x}_2 = kx_1 - 2x_2$$

将两个方程相加得到

$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -k(x_1 + x_2)$$

$$m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = -3k(x_1 - x_2)$$

重新定义变量q_1, q_2为

$$q_1 = x_1 + x_2$$

$$q_2 = x_1 - x_2$$

则q_1, q_2的方程为

$$m\ddot{q}_1 = -kq_1$$

$$m\ddot{q}_2 = -3kq_2$$

于是发现q_1, q_2的方程为简谐振动方程，其解为

$$q_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha) \qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$q_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \beta) \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

其中A_1, A_2, α, β为积分常数。因此原变量x_1, x_2的解为

$$x_1 = \frac{1}{2}(q_1 + q_2) = \frac{A_1}{2}\sin(\omega_1 t + \alpha) + \frac{A_2}{2}\sin(\omega_2 t + \beta)$$
$$x_2 = \frac{1}{2}(q_1 - q_2) = \frac{A_1}{2}\sin(\omega_1 t + \alpha) - \frac{A_2}{2}\sin(\omega_2 t + \beta)$$

最后得到的一般解说明这个体系中的每个小球的运动是两种简谐振动的叠加，每种振动所占比例以及振动相位是由初始条件决定的。这两种简谐振动被称为体系的简正振动模式（normal modes）。两种简正模式的振动频率称为简正频率。

如果将初始条件设为

$$x_1(0) = x_2(0) = a \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$$

则得到体系的解为

$$x_1 = x_2 = a\sin(\omega_1 t)$$

这时候可以看到体系中两个小球在同步运动，其运动方向和位移大小都是相同的。这种时候中间的弹簧长度保持原长不变，也就是说中间的弹簧没有起作用，对于每个小球来说仅受到了一个弹簧的弹力，因此这时候的振动与单弹簧的时候一样，具有相同的振动频率。而如果将初始条件设为

$$x_1(0) = a \qquad x_2(0) = -a \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$$

则得到体系的解为

$$x_1 = a\sin(\omega_2 t) \quad x_2 = -a\sin(\omega_2 t)$$

这时候体系中两个小球始终在做反向运动，其位移大小相同，但运动方向相反。中间的弹簧长度的变化是两边弹簧长度变化的两步，对于每个小球来说等于受到了三个弹簧的弹力，因此这时候的振动如同受到了一个弹性系数是原来三倍的单弹簧的作用，其振动频率为$\sqrt{3\frac{k}{m}}$。

在将弹性体系的自由度增加的时候（比如为N）可以一般性的证明体系会具有N个简正模式，也就是说会有N个不同频率的振动模式。每个自由度的运动都是这N种简正模式的叠加。

$$x_i = \sum_{j=1}^{N} A_{ij} \sin(\omega_j t + \alpha_j)$$

通过适当的组合这些自由度可以得到新的变量，这些新变量会和之前讨论两自由度问题时候的q一样，每个变量仅对应一种简正模式。在线性代数中这对应于二项式对角化问题。

现实中的多数多自由度体系并不像前面讨论的那样用多个线性弹簧联系起来。但是当体系具有稳定平衡态的时候，当体系在平衡态附近做微小的运动总是可以近似当作线性弹性体系的。这是因为在稳定平衡态附近足够小的区域体系总是会受到回复力的作用以保持体系的稳定平衡特性。并且在足够小的变化下这个回复力可以近似为线性的。

固体可以作为一个典型的例子。在固体中原子不能随意运动，每个原子都有它的特定平衡位置，这些位置形成了有序或者无序的网格结构。每个原子只能在网格的格点位置附近做振动。这些振动也是由简正模式组成的。通过研究这些简正模式的构成就是研究固体特性的重要手段之一。

考虑一个一维多自由度的弹性体系，它由多个弹簧和多个小球组成。当弹簧和小球的数目增多的时候，体系的简正模式会越来越多，简正频率也越来越多。当体系中弹簧的数目增加到无穷大的时候，简正频率也变得无穷多，这时候体系的运动就由振动变成了波。比如一根琴弦，它可以当作无穷多的弹簧连接到一起形成的。从这个角度看，琴弦的运动就是振动的叠加。由于在这样的考虑下琴弦也是由无穷多个相互紧挨的小球组成的，这些小球的振动整体来看就是波动。

第30讲 波方程及解

什么是波

波是常见的物理现象，它是物理量的扰动或振动在物质或空间中的传播。有很多不同类型的波。

机械波：机械波是通过介质传播的波，如声波需要空气作为媒介，水波需要水作为媒介。机械波的本质是介质受到扰动发生形变，而形变导致介质内部受力不均匀，从而使得形变逐步在介质传播出去。

电磁波：不同于机械波，电磁波的传播不需要介质，可以在真空中传播。电磁波是电磁场的振动，电磁波可以由电荷的加速运动产生。光波是特殊频段的电磁波，它来源于电子在分子、原子能级间的跃迁。

物质波：量子力学发现任何物质都和光类似，都有波的性质，这种波被称为物质波。对于宏观物体而言，其波动波长非常的小，从而波的各种常见特性并不显著。但对于原子及之下的微观物体，波动性质非常显著，必须从波的角度来进行研究。

引力波：电磁相互作用通过电磁波进行传递，同样的，引力相互作用应通过引力波来传递。但由于不像电荷，引力荷（引力质量）只有一种，同时也由于引力相互作用本身就很弱，导致引力波要比电磁波弱非常多。到目前为止，人们还没有直接观测到引力波，但通过双星辐射等天文观测已间接地证明了引力波的存在。引力波是时空本身的振荡，也是不需要介质的。

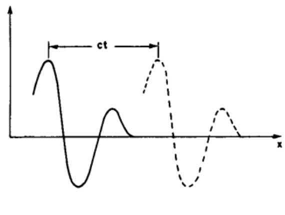
行波

行波是指运动的波。考虑一个以$x-vt$为变量的函数，其中x为空间坐标，t为时间，

$$f(x,t)=f(x-vt)$$

初始时$t=0$，x处的函数为

$$f(x,t=0)=f(x)$$



在t时刻，$x'=x+vt$处的函数值与t = 0，x 处的函数是相同的

$$f\big((x+vt),t\big)=f(x)$$

这是因为$x'-vt=x+vt-vt=x$ ，也就是说存在如下关系

$$f(x,0)=f(x+vt,t)$$

这个性质表明，由f代表的一个物理量在t时刻的空间分布，正好就是零时刻的空间分布整体移动了vt的结果。因此表示一个波以速度从左到右运动。

时空中波的传播

由前可知，一个物理量f的时空分布如果有如下形式

$$f(x,t)=f(x\pm vt)$$

则它是以行波的形式存在的，其中的正号代表向左传播的波，负号代表向右传播的波。但实际上传播的物理量在空间中的分布形式，而每一点处的物理量只是在原地变化。如在一根琴弦上的行波，我们看到一个特定的形状沿着琴弦运动出去，而弦上物质只是在上下振动，并没有跟着波运动出去。

波的叠加原理

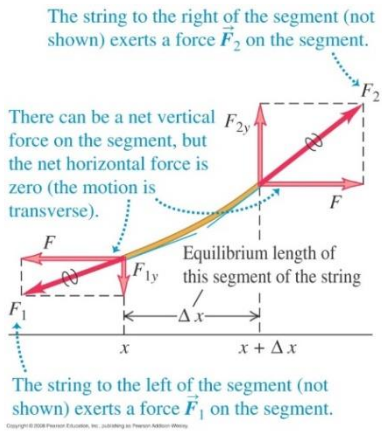
对于线性系统，当两列（或更多列）波相遇时，介质的位移为当单列波经过时造成的位移的简单叠加

$$f_{total}(x,t)=f_1(x,t)+f_2(x,t)$$

这是由于线性方程其解本身具有可加性。由此可知当两列速度不同的波相遇之后会再次分开，它们的碰撞不会影响其之后的运动。

弹性弦中传播的波

现在讨论一根沿x方向放置的弹性弦在垂直于x方向（如y方向）的运动。在t时刻，考虑从x到$x+\Delta x$一段线元，其两端受到到张力分别为$\vec{F}_1,\vec{F}_2$，它们的方向为两端处线元切向向外的方向。如图所示。设两端切线的倾角分别为α,β。由于弦上各处只在y方向上运动，无x方向运动，因此线元在x方向上受力平衡，因此有关系



$$F_1cos\alpha=F_2cos\beta=F$$

在y方向上的运动方程为

$$F_2 sin\beta - F_1 sin\alpha = \Delta m a = \lambda \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

其中Δm为线元质量，λ为线元的线密度。方程两边都除以F得

$$\frac{\lambda \Delta x}{F}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{F_2 sin\beta}{F_2 cos\beta} - \frac{F_1 sin\alpha}{F_1 cos\alpha} = tan\beta - tan\alpha$$

而

$$\frac{tan\beta - tan\alpha}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{x}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

于是可以得到方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\lambda}{F}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

令

$$v^2 = \frac{F}{\lambda}$$

方程变为

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

此方程即弹性弦的波动方程。如果弦的形变为一行波

$$y(x,t) = y(x \pm vt)$$

其对x的一阶微分为

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{dy}{d(x \pm vt)}\frac{d(x \pm vt)}{dx} = \frac{dy}{d(x \pm vt)}$$

二阶微分为

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d^2 y}{d(x \pm vt)^2}$$

类似地可以得到对时间的二阶微分

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{d^2 y}{d(x \pm vt)^2},$$

容易看到$y(x \pm vt)$的确满足弦的波动方程，也就是说行波的确是弦的波动方程的解。并且波速就是之前定义的

$$v = \sqrt{\frac{F}{\lambda}}$$

其中F是弦的张力，λ是弦的线密度。

由于所得到的波动方程为线性方程，因此如果$y_1(x,t)$ 和$y_2(x,t)$分别是方程

的解

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2},\quad \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}$$

则$y(x,t)=y_1(x,t)+y_2(x,t)$也是方程的解

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}+\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

正弦波

对于波动方程，

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

容易看到如下形式的正弦函数为方程的解

$$y(x,t)=y(x\pm vt)=Asin(\omega t\pm kx+\phi_0)$$

将之带入波动方程后得到

$$k^2=\frac{\omega^2}{v^2}\quad or\quad v^2=\frac{\omega^2}{k^2}$$

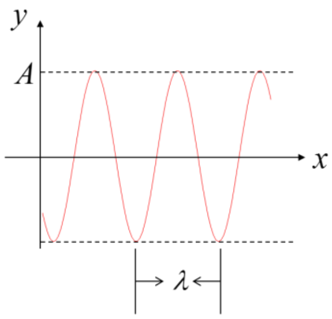
其中A称为振幅，k称为波数，ω称为角频率，ϕ_0称为初相位。此正弦波在时间上和空间上都为周期函数，满足

$$Asin\left(\omega\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)\pm kx+\phi_0\right)=Asin(\omega t\pm kx+\phi_0)$$

$$Asin\left(\omega t\pm k\left(x+\frac{2\pi}{k}\right)+\phi_0\right)=Asin(\omega t\pm kx+\phi_0)$$

令

$$\lambda=\frac{2\pi}{k}$$



称为波长。令

$$T=\frac{2\pi}{\omega}$$

称为周期。周期的倒数，即单位时间内的振动次数

$$f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$$

称为频率。

考虑到波动方程的线性特性，其一般解为具有不同的振幅A，频率ω和波数k的正弦波的叠加。但由于波速$v=\sqrt{\frac{\omega^2}{k^2}}$，因此频率$\omega$和波数$k$只有一个是独立的。

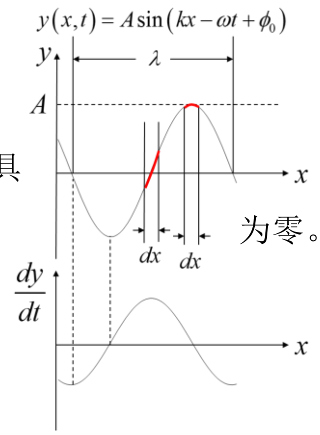
正弦波的能量

弦上任意质点都是在做y方向上的运动，其振动速度为

$$\frac{d}{dt}y(x,t) = \pm\omega A\cos(kx \pm \omega t + \phi_0)$$

因此弦上线元Δx的动能为

$$dK = \frac{1}{2}\omega^2 A^2 \cos^2(kx \pm \omega t + \phi_0)\, dm$$



因此某一时刻在弦上处于平衡位置上的质点速度最大，具有最大的动能，而处于振幅位置的质点速度为零，动能为零。由于$dm = \lambda dx$，则

$$dK = \frac{1}{2}\lambda\omega^2 A^2 \cos^2(kx \pm \omega t + \phi_0)\, dx$$

因此动能的变化率为

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2}\lambda v\omega^2 A^2 \cos^2(kx \pm \omega t + \phi_0)$$

可以认为动能是以此功率沿着弦传播的。由于此功率也是在做周期变化，因此经常使用平均传输功率

$$\left(\frac{dK}{dt}\right)_{avg} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\lambda v\omega^2 A^2 \cos^2(kx \pm \omega t + \phi_0)\, dt = \frac{1}{4}\lambda v\omega^2 A^2$$

实际上除了动能之外还有弹性势能，而由线性弹簧的特性可知，弹性能的平均值和动能的平均值是相同的。因此总的传输功率为

$$P_{avg} = 2\left(\frac{dK}{dt}\right)_{avg} = \frac{1}{2}\lambda v\omega^2 A^2$$